

مبحث : چند ضلعی ها

نام دبیر: مهندس سامان اسپهرم
نام دوره : نوروز
شماره جلسه : جلسه دوم
نام درس و مقطع و رشته : هندسه پایه - دوازدهم
ریاضی، فیزیک
تاریخ جلسه : ۱۴۰۲/۰۱/۰۳

نام کتاب	من در کلاس حل می کنم	خودتان حل کنید (در منزل یا کار در کلاس)
کتاب درسی		
کتاب آبی		
کتاب نوروز		



نکته برداری و خلاصه نویسی

تعریف چندضلعی: چندضلعی، شکل بسته‌ای است که از اجتماع چند پاره‌خط متوالی (حداقل سه پاره‌خط) تشکیل شده باشد طوری که هر دو پاره‌خط متوالی در یک راستا نباشند.
هر یک از پاره‌خط‌ها را یک ضلع و نقطه مشترک دو ضلع متوالی را یک رأس چندضلعی می‌نامند.
چندضلعی محدب: چندضلعی‌ای که اگر هر ضلع آن را از دو طرف امتداد دهیم، چندضلعی در یک طرف آن قرار گیرد.

اگر چندضلعی محدب نباشد، آن را مقعر می‌نامند. هر زاویه درونی چندضلعی محدب، بین صفر و 180° است و اگر چندضلعی مقعر باشد، دست کم یک زاویه بیشتر از 180° دارد.
مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی محدب $(n-2) \times 180^\circ$ و مجموع زاویه‌های خارجی آن 360° است.

❓ در یک n ضلعی محدب، کدام گزینه درست است؟

- دست کم سه تا از زاویه‌های خارجی آن منفرجه هستند.
- حداکثر سه تا از زاویه‌های داخلی آن منفرجه هستند.
- دست کم سه تا از زاویه‌های داخلی آن منفرجه هستند.
- حداکثر سه تا از زاویه‌های خارجی آن منفرجه هستند.

چندضلعی منتظم: اگر در یک چندضلعی محدب، تمام اضلاع برابر و تمام زاویه‌های آن نیز برابر باشند، آن را چندضلعی منتظم می‌نامند.

هر زاویه درونی یک n ضلعی منتظم برابر $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$ و هر زاویه خارجی آن برابر $\frac{360^\circ}{n}$ است.

تعداد قطرهای گذرنده از هر رأس یک n ضلعی محدب، برابر $n-3$ و تعداد کل قطرهای آن $\frac{n(n-3)}{2}$ است.

❓ اگر در یک n ضلعی محدب، تعداد قطرهای ۸ برابر تعداد اضلاع باشد، آن گاه مجموع زاویه‌های

داخلی آن چند برابر مجموع زاویه‌های خارجی آن است؟

- ۱) $8/5$ ۲) ۹ ۳) $5/9$ ۴) $10/1$

چند ضلعی های خاص

➡ ۱) متوازی الاضلاع

چهارضلعی‌ای را که اضلاع روبه‌روی آن موازی باشند، متوازی‌الاضلاع می‌نامند.

ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع

🔵 در هر متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های مقابل با هم برابرند.

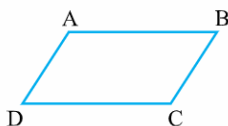
🔵 در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مقابل با هم برابرند و زاویه‌های مجاور، مکمل یکدیگرند.

🔵 در هر متوازی‌الاضلاع، قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند.

🔵 اگر دو ضلع مقابل در یک چهارضلعی هم موازی و هم مساوی باشند، آن چهارضلعی یک متوازی‌الاضلاع است.

قضیه مهم هر سه میانه مثلث در یک نقطه هم‌رس هستند و نقطه هم‌رسی میانه‌ها، هر میانه را به

نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند.





متوازی‌الاضلاعی که یک زاویه‌اش قائمه باشد، مستطیل نامیده می‌شود. به سادگی معلوم می‌شود که اگر یکی از زاویه‌های متوازی‌الاضلاعی قائمه باشد، سه زاویه دیگر آن نیز قائمه هستند.

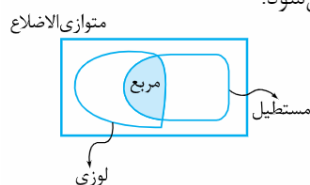
❏ قطرهای یک مستطیل با هم برابرند.

متوازی‌الاضلاعی که دو ضلع مجاور آن با هم برابر باشند، لوزی نامیده می‌شود. به سادگی معلوم می‌شود که هر چهار ضلع لوزی با هم برابرند.

ویژگی‌های لوزی

❏ الف در لوزی قطرها بر هم عمودند. ❏ ب در لوزی قطرها نیمساز زاویه‌ها هستند.

متوازی‌الاضلاعی که هم لوزی و هم مستطیل باشد، مربع نامیده می‌شود. توجه داشته باشیم که هر مستطیل، متوازی‌الاضلاع است ولی هر متوازی‌الاضلاعی دلیلی ندارد که مستطیل باشد؛ به همین ترتیب هر مربعی یک مستطیل نیز هست ولی هر مستطیلی دلیلی ندارد یک مربع باشد. شکل مقابل می‌تواند تمام این موارد را بازگو کند.

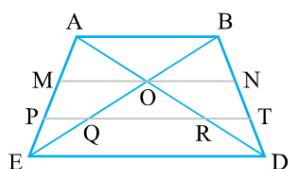


چهارضلعی‌ای را که فقط دو ضلع آن موازی باشند دوزنقه می‌نامند، آن دو ضلع موازی را قاعده‌های دوزنقه و دو ضلع دیگر ساق‌های دوزنقه نامیده می‌شوند. اگر دو ساق دوزنقه‌ای برابر باشند، آن را دوزنقه متساوی‌الساقین می‌نامند.

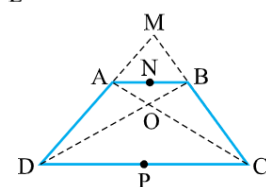
ویژگی‌های مهم دوزنقه

❏ الف زاویه‌های مجاور به هر ساق، مکمل یکدیگرند.

❏ ب خطی که از نقطه برخورد دو قطر، موازی با دو قاعده رسم شود و محدود به دو ساق باشد، در این نقطه، نصف می‌شود؛ یعنی در شکل مقابل $OM = ON$.



❏ پ اگر خطی موازی دو قاعده باشد، پاره‌های بین یک ساق و یک قطر با پاره‌خط بین ساق و قطر دیگر برابرند؛ یعنی در شکل مقابل $PQ = RT$.



❏ ت در هر دوزنقه، وسط‌های دو قاعده، نقطه برخورد دو قطر و نقطه برخورد دو ساق، بر یک راستا هستند؛ یعنی اگر N و P وسط‌های دو ساق باشند، آن‌گاه M, N, O, P روی یک خط قرار دارند.

ویژگی‌های دوزنقه متساوی‌الساقین

❏ الف زاویه‌های مجاور به هر قاعده برابرند.

❏ ب قطرهای دوزنقه متساوی‌الساقین با هم برابرند.

چند نکته

❏ ۱ چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای یک متوازی‌الاضلاع که لوزی نباشد، یک مستطیل است.

❏ ۲ چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای یک مستطیل که مربع نباشد، یک مربع است. اگر طول

و عرض مستطیل a و b باشند، آن‌گاه طول ضلع این مربع $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ است.

❏ ۳ چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای یک دوزنقه متساوی‌الساقین یک کایت است.

❏ ۴ اگر وسط‌های اضلاع هر چهارضلعی دلخواه را به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.

اگر دو قطر چهارضلعی برابر باشند، آن متوازی‌الاضلاع، یک لوزی است و اگر دو قطر چهارضلعی بر هم عمود باشند، آن متوازی‌الاضلاع، یک مستطیل است.

- 1 در هر مثلث قائم الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.
- 2 اگر در مثلث قائم الزاویه ای یک زاویه 30° باشد، ضلع مقابل به زاویه 30° نصف وتر است و ضلع مجاور به زاویه 30° ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است.

3 اگر یک زاویه مثلث قائم الزاویه ای 15° باشد، ارتفاع نظیر وتر، $\frac{1}{4}$ وتر است.

4 اگر یک زاویه مثلث قائم الزاویه ای 45° باشد، هر ضلع زاویه قائمه، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وتر است.

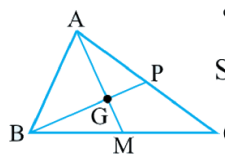
روابط مساحت شکل های خاص

- 1 مساحت مربع به ضلع a ، برابر است با a^2 .
- 2 مساحت مستطیلی به طول a و عرض b برابر است با ab .
- 3 مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصلضرب یک ضلع در ارتفاع نظیر آن ضلع.
- 4 مساحت دوزنقه برابر است با نصف حاصلضرب ارتفاع در مجموع دو قاعده.
- 5 اگر قطرهای یک چهارضلعی بر هم عمود باشند، مساحت آن چهارضلعی، نصف حاصل ضرب دو قطر است.
- 6 مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a ، برابر $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ است.
- 7 مساحت یک شش ضلعی منتظم به ضلع a ، برابر $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ است.
- 8 سه میانه هر مثلث در یک نقطه هم رس هستند و آن را به شش مثلث با مساحت های یکسان تقسیم می کنند.

در فصل دوم دیدیم که:

- 1 اگر دو مثلث، قاعده برابر داشته باشند، نسبت مساحت های این دو مثلث برابر با نسبت ارتفاع های نظیر است.
- 2 اگر دو مثلث، ارتفاع برابر داشته باشند، نسبت مساحت های این دو مثلث برابر با نسبت قاعده های نظیر است.
- 3 نسبت مساحت های دو مثلث متشابه، برابر است با مربع نسبت تشابه آن دو مثلث.

در شکل مقابل، AM و BP میانه هستند. کدام گزینه درست است؟

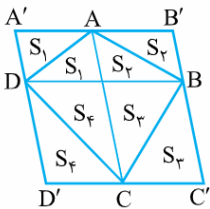


$$S_{PGMC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \quad (2)$$

$$S_{ABG} = \frac{2}{3} S_{ABC} \quad (1)$$

(4) هیچ یک از این ها

$$S_{APG} = \frac{1}{3} S_{ABC} \quad (3)$$



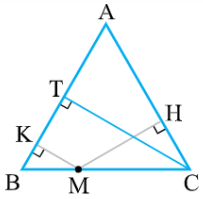
مسئله مهم: اگر در یک چهارضلعی محدب، از هر رأس خطی موازی قطر چهارضلعی رسم کنیم، آن گاه مساحت چهارضلعی ای که حاصل می شود، دو برابر مساحت چهارضلعی اولیه است؛ یعنی در شکل مقابل داریم:

$$S_{A'B'C'D'} = 2 S_{ABCD}$$

نکته مهم

1 مجموع فاصله های هر نقطه روی قاعده مثلث متساوی الساقین از ساق ها، برابر ارتفاع نظیر یکی از ساق ها است؛ یعنی در شکل مقابل داریم:

$$MH + MK = CT$$



2 مجموع فاصله های هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع مثلث، برابر ارتفاع نظیر هر یک از اضلاع است؛ یعنی در شکل مقابل داریم:

$$MP + MK + MT = AH$$

